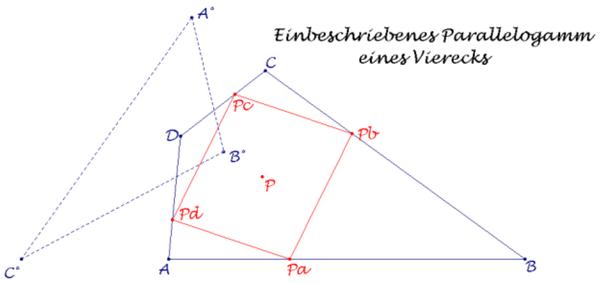
Parallelogramme eines Vierecks

Eckart Schmidt

Zu einem Viereck lassen sich einbeschriebene Parallelogramme zu vorgegebenen Mitten betrachten. So erhält man z.B. zum Schwerpunkt des Vierecks das Varignon-Parallelogramm der Seitenmitten. In dieser Ausarbeitung wird untersucht, zu welchen Mitten sich Rauten bzw. Rechtecke ergeben, und es werden zugehörige Ortslinien der Mitten aufgezeigt. Abschließend wird auf einbeschriebene Quadrate eingegangen. – Gearbeitet wird in baryzentrischen Koordinaten des Diagonaldreiecks.



Einbeschriebene Parallelogramme

Ein Viereck *ABCD*, das nicht schon ein Parallelogramm ist, habe die Gegenseitenschnitte

$$A^o = BC \cap DA \quad \text{und} \quad C^o = AB \cap CD$$

und den Diagonalenschnitt $B^o = AC \cap BD$.

$A^oB^oC^o$ sei als Diagonaldreieck des Vierecks das Bezugsdreieck für baryzentrische Koordinaten mit den Seitenlängen *a*, *b*, *c*. Benutzt werden weiterhin die Conway-Abkürzungen *[Yiu]* S_A, S_B, S_C und S mit

$$2S_A = -a^2 + b^2 + c^2,\ 2S_B = a^2 - b^2 + c^2,\ 2S_C = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\text{und } S = \sqrt{S_AS_B + S_BS_C + S_CS_A} = 2\Delta.$$

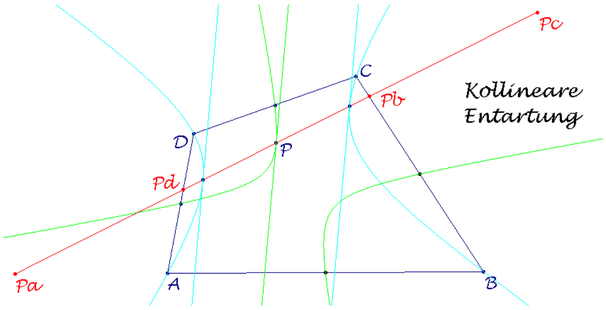
Gibt man die Ecke *D* des Vierecks vor, so ist das Restdreieck *ABC* das Anti-Ceva-Dreieck von *D*; damit ist folgende Koordinatenwahl möglich:

$$A(-u:v:w),\quad B(u:-v:w),\quad C(u:v:-w),\quad D(u:v:w)\ .$$

Unter einem einbeschriebenen Parallelogramm $P_aP_bP_cP_d$ sei ein Parallelogramm verstanden, dessen Ecken P_a, P_b, P_c, P_d auf den Seitengeraden *AB*, *BC*, *CD*, *DA* des Vierecks liegen. Zu einer Parallelogramm-Mitte (*Pg*-Mitte) $P(p,q,r)$ lässt sich dann wie folgt das zugehörige einbeschriebene Parallelogramm konstruieren: Bringt man die Spiegelung der Seite *AB* an *P* mit der Gegenseite *CD* zum Schnitt, so erhält man die *Pg*-Ecke P_c, die an *P* gespiegelt die Gegenecke P_a ergibt. Entsprechend erhält man mit P_b und P_d das einbeschriebene Parallelogramm. Folgt man dieser Konstruktion analytisch, so hat das Parallelogramm die Ecken:

$$P_a(u:-v:\frac{pv^2+qu^2+ruv}{pv-qu}),\quad P_b(\frac{pvw+qw^2+rv^2}{qw-rv}:v:-w),$$

$$P_c(u:v:\frac{-pv^2-qu^2+ruv}{pv+qu}),\quad P_d(\frac{pvw-qw^2-rv^2}{qw+rv}:v:w).$$



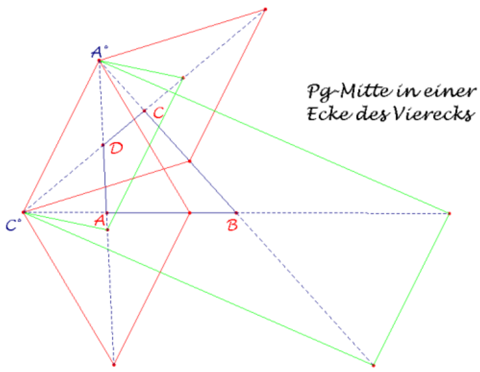
Das einbeschriebene Parallelogramm entartet kollinear, wenn die *Pg*-Mitte P ein Punkt des Mittenkegelschnitts ist. Der Mittenkegelschnitt eines Vierecks ist die Ortslinie der Zentren umbeschriebener Kegelschnitte. Seine Gleichung ist

$$qrx^2+pry^2+pqz^2=0.$$

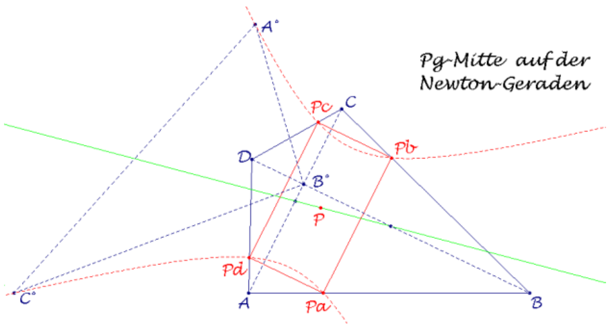
Dabei schneidet die Trägergerade des kollinear entarteten Parallelogramms den Umkegelschnitt mit Zentrum in der *Pg*-Mitte P in zwei Punkten, in denen die Tangenten parallel zur Tangente in P an den Mittenkegelschnitt sind.
Der Mittenkegelschnitt enthält die Seiten- und Diagonalenmitten sowie die Ecken des Diagonaldreiecks. Für die Seiten- und Diagonalenmitten entarten die Parallelogramme auf den zugehörigen Seiten bzw. Diagonalen; für die Ecken des Diagonaldreiecks auf einer Parallelen zur Gegenseite. Bei den Gegenseitenschnitten des Vierecks kann von kollinear entarteten Rauten gesprochen werden. Auf diese Entartungen wird im Folgenden nicht mehr eingegangen.

Spezielle einbeschriebene Parallelogramme

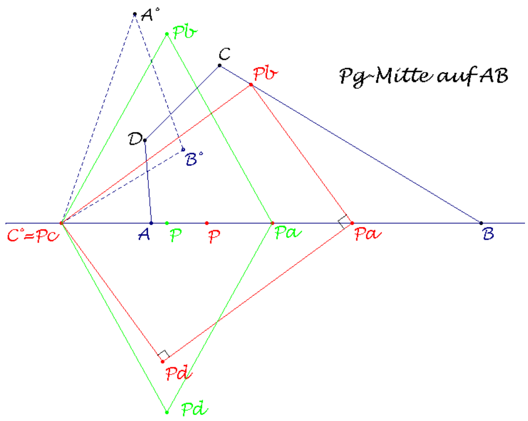
Hier seien je nach Lage der *Pg*-Mitte spezielle einbeschriebene Parallelogramme aufgezeigt.



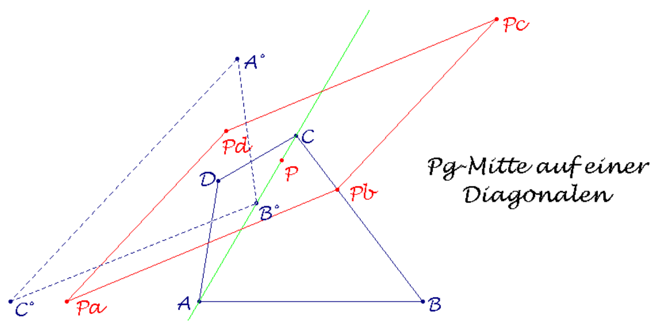
(1) Fällt die *Pg*-Mitte in eine Ecke des Vierecks, dann wird die Basis A^oC^o des Diagonaldreiecks zu einer *Pg*-Seite.



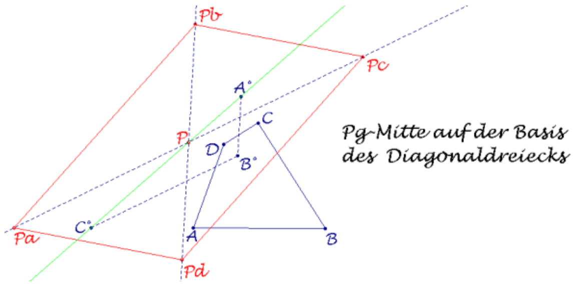
(2) Liegt die *Pg*-Mitte auf der Newton-Geraden des Vierecks, d.h. auf der Verbindungsgeraden der Diagonalenmitten, dann sind die *Pg*-Seiten parallel zu den Diagonalen des Vierecks (z.B. Varignon-Pg.). Die Ecken des Parallelogramms teilen Gegenseiten des Vierecks im gleichen, benachbarte Seiten im reziproken Verhältnis. Sie liegen mit den Gegenseitenschnitten A^o, C^o des Vierecks auf einem Kegelschnitt.



(3) Liegt die *Pg*-Mitte auf einer Seitengeraden des Vierecks, dann ist der zugehörige Gegenseitenschnitt *Pg*-Punkt.



(4) Liegt die *Pg*-Mitte auf einer Diagonalen des Vierecks, so ist ein Gegenseitenpaar des Parallelogramms parallel zur Basis des Diagonaldreiecks.



(5) Liegt die *Pg*-Mitte auf der Basis des Diagonaldreiecks, so sind die *Pg*-Diagonalen Parallelen zu den Schenkeln des Diagonaldreiecks.

Weitergehend stellt sich die Frage, wann diese Parallelogramme Rauten oder Rechtecke bzw. Quadrate sind.

Einbeschriebene Rauten

Wertet man die Seitenlängengleichheit für einbeschriebene Parallelogramme analytisch aus, so erhält man für die *Pg*-Mitten eine Ortslinie mit der Gleichung

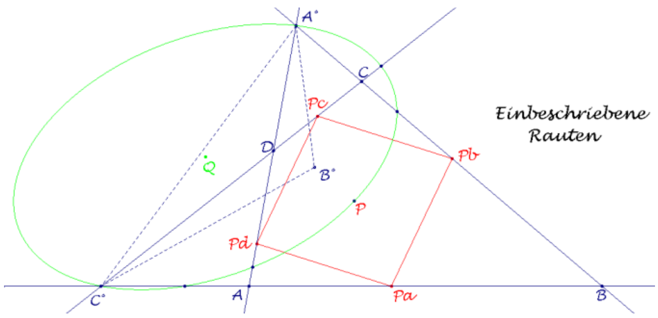
$$(S_A qru^2 - S_B prv^2 + S_C pqw^2)v^2 + b^2q^2u^2w^2 = 0\,.$$

Dieser Kegelschnitt ist das Bild des Thales-Kreises über der Basis A^oC^o des Diagonaldreiecks mit der Gleichung

$$S_A xy - S_B y^2 + S_C yz + b^2 zx = 0$$

bei der „isoconjugation“ *[Gib;1.2]* mit den Fixpunkten *A, B, C, D*:

$$(x:y:z) \quad \rightarrow \quad (u^2yz : v^2zx : w^2xy)\,.$$



Zentrum des Kegelschnitts ist

$$Q\Big(u^2\big(S_A - \frac{2S^2w^2}{S_Au^2 + S_Bv^2 + S_Cw^2}\big) : S_Bv^2 : w^2\big(S_C - \frac{2S^2u^2}{S_Au^2 + S_Bv^2 + S_Cw^2}\big)\Big)\,.$$

Dieser Kegelschnitt enthält die Gegenseitenschnitte A^o und C^o, für die die Raute kollinear entartet. Die zweiten Schnittpunkte dieses Kegelschnitts mit den Seitengeraden des Vierecks

$$\Big(u : \pm v : \frac{(b^2u^2 \pm S_C v)w^2}{(S_B v \mp S_A u)v}\Big) \quad und \quad \Big(\frac{(b^2u^2 \pm S_A v)u^2}{(S_B v \mp S_C w)v} : \pm v : w\Big)$$

lassen sich konstruieren, indem man von den Gegenseitenschnitten auf die verbleibenden Gegenseiten lotet und die vierten harmonischen Punkte auf diesen Seiten bestimmt.

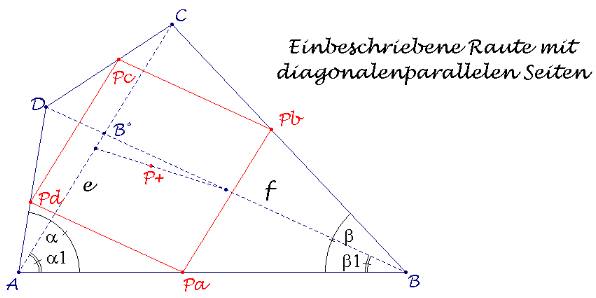
Ein Beispiel: Es gibt zwei einbeschriebene Rauten, deren Seiten parallel zu den Diagonalen sind (vgl. (2)). Die zugehörigen Rauten-Mitten sind

$$P^{\pm}((a^2-b^2)u^2-a^2w^2\pm\sqrt{(c^2u^2+a^2w^2)^2-4S_B^2u^2w^2}$$

$$:-2S_Bv^2:-c^2u^2-(b^2-c^2)w^2\pm\sqrt{(c^2u^2+a^2w^2)^2-4S_B^2u^2w^2}).$$

Diese Rautenmitten teilen die Verbindungsstrecke der Diagonalenmitten harmonisch im Verhältnis

$$\kappa^{\pm}=\pm\frac{(u-v+w)(u+v+w)\sqrt{S_Au^2+S_B(u-w)^2+S_Cw^2}}{(-u+v-w)(u+v-w)\sqrt{S_Au^2+S_B(u+w)^2+S_Cw^2}}.$$



Die aufwändigen Ergebnisse deuten darauf hin, dass der geometrische Hintergrund wenig mit dem Diagonaldreieck zu tun hat. Dennoch hat das Verhältnis κ^+ eine einfache Deutung, es ist das Längenverhältnis der Diagonalen des Vierecks, einfacher durch Winkel des Vierecks darzustellen:

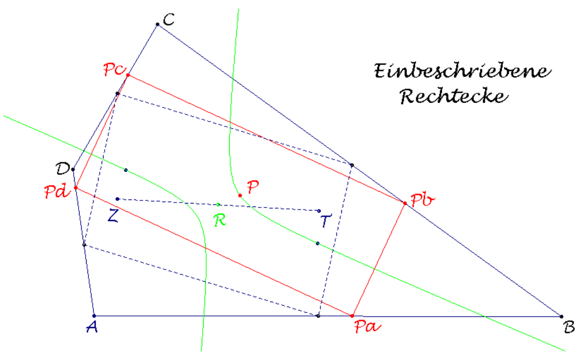
$$\kappa^{+}=\frac{e}{f}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\frac{\sin(\alpha+\beta_1)}{\sin(\beta+\alpha_1)}\ .$$

In diesem Verhältnis teilen die Ecken der inneren einbeschriebenen Raute auch die Seiten *AB*, *CB*, *CD*, *AD*, so dass eine Konstruktion möglich ist.

Rechtecke

Wertet man die Rechtwinkligkeit für einbeschriebene Parallelogramme analytisch aus, so erhält man für die *Pg*-Mitten eine Ortslinie mit der Gleichung

$$a^2v^4w^2x^2+b^2u^2w^2(u^2-w^2)y^2-c^2u^2v^4z^2-2u^2v^2w^2(S_Az-S_Cx)y=0.$$



Dieser Kegelschnitt enthält die Diagonalenmitten

$$(u : -\frac{v^2}{u \pm w} : \pm w)$$

mit den kollinearen Entartungen der Rechtecke.
Das Zentrum dieses Kegelschnitts

$$R(u^2(b^2c^2u^2 - S_C c^2v^2 - S_B b^2w^2) : v^2(-S_C c^2u^2 + a^2c^2v^2 - S_A a^2w^2)$$
$$: w^2(-S_B b^2u^2 - S_A a^2v^2 + a^2b^2w^2))$$

ist der Mittelpunkt zweier merkwürdiger Punkte des Vierecks, des Poncelet- und des Bennett-Punktes. Der Poncelet-Punkt

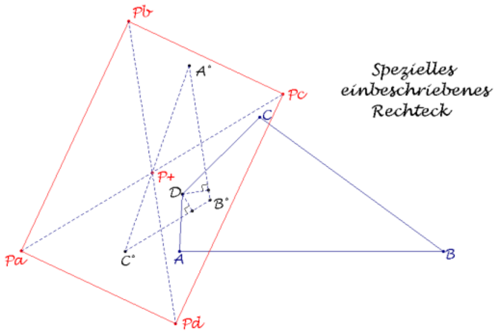
$$Z(\frac{1}{b^2w^2 - c^2v^2} : \frac{1}{c^2u^2 - a^2w^2} : \frac{1}{a^2v^2 - b^2u^2})$$

eines Vierecks *[Gri]* ist das Zentrum der gleichseitigen Umhyperbel. Der Bennett-Punkt *[Cun;3.21]* oder Tangentialpunkt *[Stä]*

$$T(-a^4v^2w^2 + b^4w^2u^2 + c^4u^2v^2 - b^2c^2u^2(-u^2 + v^2 + w^2)$$
$$: a^4v^2w^2 - b^4w^2u^2 + c^4u^2v^2 - c^2a^2v^2(u^2 - v^2 + w^2)$$
$$: a^4v^2w^2 + b^4w^2u^2 - c^4u^2v^2 - a^2b^2w^2(u^2 + v^2 - w^2))$$

sei in seiner Geometrie nur soweit angesprochen, als dass es der einzige Punkt ist, dessen Fußpunktviereck immer ein Parallelogramm ist. Das Zentrum R des obigen Kegelschnitts ist die *Pg*-Mitte dieses Fußpunktparallelogramms.
Abschließend seien zwei koordinatenmäßig überschaubare und konstruierbare einbeschriebene Rechtecke angesprochen mit Mitten auf der Basis des Diagonaldreiecks (vgl. (5)):

$$P^{\pm}(cu : 0 : \pm aw).$$



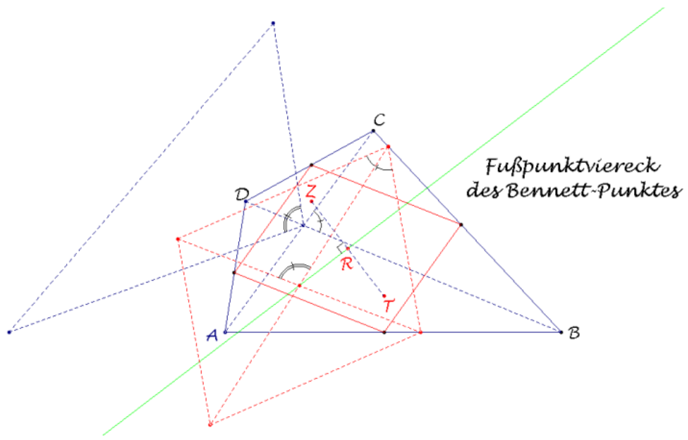
Diese beiden Mitten teilen die Basis A^oC^o des Diagonaldreiecks harmonisch im Verhältnis der Abstände des Punktes D von den Seiten A^oB^o und C^oB^o, so dass sie sich mühelos konstruieren lassen. Die Ecken der Rechtecke sind dann:

$$P_a^{\pm}(u : -v : \frac{\pm aw + cv}{c}), \quad P_b^{+}(\frac{av + cu}{a} : -v : \pm w),$$
$$P_c^{\pm}(u : v : \frac{\pm aw - cv}{c}), \quad P_d^{\pm}(\frac{-av + cu}{a} : v : \pm w) \;.$$

Das Fußpunktviereck des Bennett-Punktes

Das Fußpunktviereck des Bennett-Punktes ist, wie oben angesprochen, ein Parallelogramm mit der *Pg*-Mitte im

Mittelpunkt R von Poncelet- und Bennett-Punkt. Dieses Parallelogramm kann als Repräsentant aller Parallelogramme mit Mitten auf der Mittelsenkrechten von Poncelet- und Bennett-Punkt betrachtet werden.



Die angesprochene Mittelsenkrechte hat die einfache Gleichung

$$a^2v^2w^2x + b^2w^2u^2y + c^2u^2v^2z = 0\,,$$

so dass Pg-Mitten auf dieser Geraden mit

$$q = -\frac{a^2v^2w^2p + c^2u^2v^2r}{b^2u^2w^2}$$

gekennzeichnet werden können. Dann sind die Ecken des zugehörigen Parallelogramms:

$$P_a\left(-u : v : \frac{u(a^2vw^2p - b^2w^2(ru+pv) + c^2u^2vr)}{a^2vw^2p + b^2uw^2p + c^2u^2vr}\right),$$

$$P_b\left(\frac{w(a^2vw^2p - b^2u^2(rv+pw) + c^2u^2vr)}{a^2vw^2p + b^2u^2wr + c^2u^2vr} : v : -w\right),$$

$$P_c\left(u : v : -\frac{u(a^2vw^2p + b^2w^2(ru-pv) + c^2u^2vr)}{a^2vw^2p - b^2uw^2p + c^2u^2vr}\right),$$

$$P_d\left(-\frac{w(a^2vw^2p - b^2u^2(rv-pw) + c^2u^2vr)}{a^2vw^2p - b^2u^2wr + c^2u^2vr} : v : w\right).$$

Diese Parallelogramme sind alle ähnlich. Für die Innenwinkel φ gilt

$$\tan\varphi = \pm\frac{2Suw}{a^2w^2 - c^2u^2}\,.$$

Man findet diese Winkel als Schnittwinkel der Diagonalen des Vierecks wieder. Für die Winkel ψ zwischen den Diagonalen der Parallelogramme ergibt sich

$$\tan\psi = \pm\frac{S}{S_B}\,.$$

Diese Winkel findet man zwischen den Schenkeln des Diagonaldreiecks wieder. Für das Seitenverhältnis errechnet sich

$$\frac{P_aP_b}{P_bP_c} = \frac{P_cP_d}{P_dP_a} = \sqrt{\frac{a^2w^2 + 2S_Buw + c^2u^2}{a^2w^2 - 2S_Buw + c^2u^2}}\,.$$

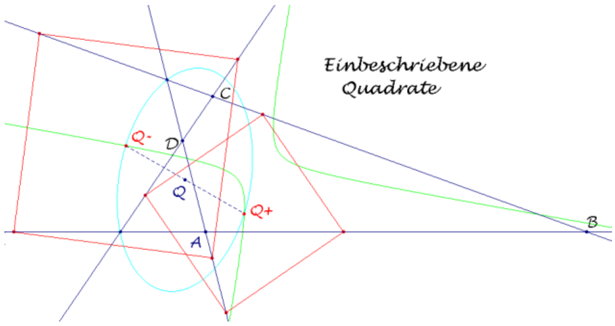
Diese Zusammenhänge gelten insbesondere für das Fußpunktparallelogramm des Bennett-Punktes. Eine Spezialisierung findet sich im letzten Abschnitt.

Einbeschriebene Quadrate

In den Schnittpunkten der Kegelschnitte für die Rauten- und Rechteck-Mitten liegen die möglichen Quadrat-Mitten

$$Q^{\pm}(u(S_A u \pm Sw) : S_B v^2 : w(S_C w \pm Su)) .$$

Sie liegen symmetrisch zum Zentrum Q des Kegelschnitts der Rautenmitten.



Die zugehörigen Quadrate haben entgegengesetzten Umlaufsinn. Auch die Koordinaten der Eckpunkte lassen sich noch übersichtlich darstellen:

$$Q_a^{\pm}\Big(u : -v : \frac{S_C w^2 + c^2 uv \pm Sw(u+v)}{S_A u - S_B v \pm Sw}\Big) ,$$

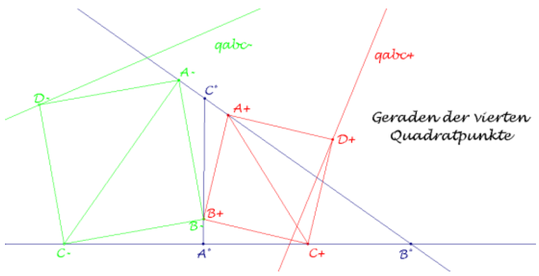
$$Q_b^{\pm}\Big(\frac{S_A u^2 + a^2 vw \pm Su(w+v)}{\pm Su - S_B v + S_C w} : -v : w\Big) ,$$

$$Q_c^{\pm}\Big(u : v : \frac{S_C w^2 - c^2 uv \pm Sw(u-v)}{S_A u + S_B v \pm Sw}\Big) ,$$

$$Q_d^{\pm}\Big(\frac{S_A u^2 - a^2 vw \pm Su(w-v)}{\pm Su + S_B v + S_C w} : v : w\Big) .$$

Konstruktion einbeschriebener Quadrate

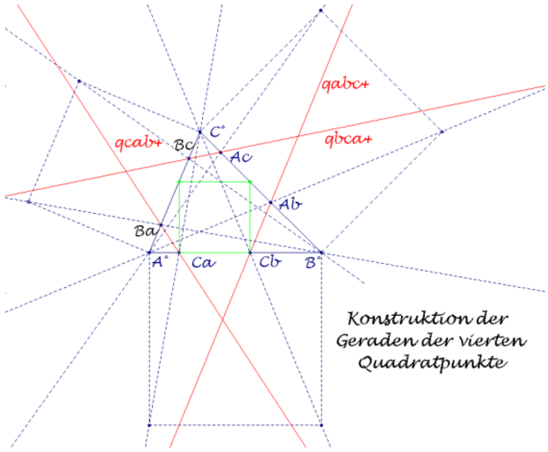
Hier sei auf eine Konstruktion der einbeschriebenen Quadrate ohne Benutzung von Kegelschnitten hingewiesen *[Lam]*, *[Sch;08-6]*.
Dazu sei das Bezugsdreieck $A^oB^oC^o$ in diesem Absatz ein Teildreiseit des Vierecks.



Betrachtet man in diesem Bezugsdreieck ein einbeschriebenes „Halb-Quadrat“, dessen rechter Winkel seinen Scheitelpunkt z.B. auf der Seitengeraden A^oC^o hat, dann liegt der vierte Quadratpunkt je nach Umlaufsinn auf einer Geraden $q_{abc}^{\pm}$ mit der Gleichung

$$(\pm S + S_A) - S_B y + (\pm S + S_C) z = 0 .$$

Beschränkt man sich auf den positiven Umlaufsinn, so gibt es zum Bezugsdreieck drei dieser Geraden. Sie lassen sich wie folgt konstruieren:



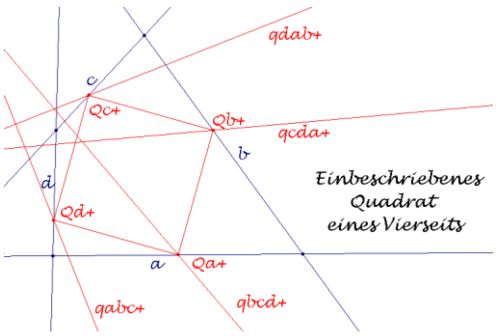
Zeichnet man z.B. über der Seite A^oB^o ein Quadrat, so schneiden die Verbindungsgeraden des dritten und vierten Quadratpunkts mit C^o die Seite A^oB^o in den Punkten C_a und C_b. Dabei ist C_aC_b die Seite eines Quadrats im Bezugsdreieck, so dass C_a ein Punkt der Geraden q_{cab}^{+} und C_b ein Punkt der Geraden q_{abc}^{+} ist. Die entsprechenden Konstruktionen für die anderen Seiten ergeben die Geraden für die vierten Quadratpunkte

$$q_{abc}^{+} = A_bC_b, \quad q_{bca}^{+} = A_cB_c, \quad q_{cab}^{+} = B_aC_a .$$

Betrachtet man jetzt ein Vierseit aus den Geraden a, b, c, d dann erhält man die Ecken der einbeschriebenen Quadrate in den Schnitten

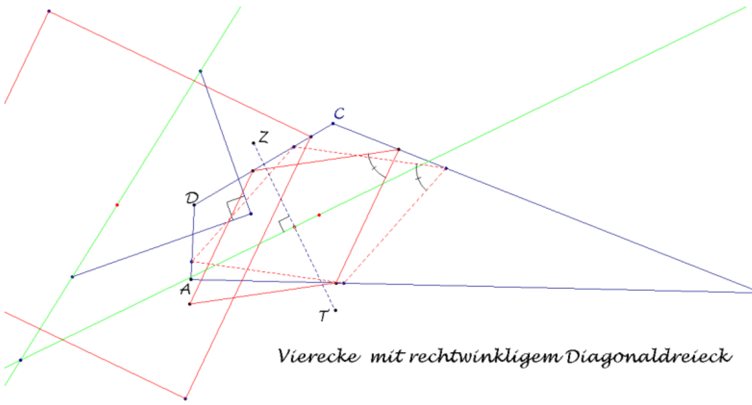
$$Q_a^{\pm} = a \cap q_{bcd}^{\pm}, \quad Q_b^{\pm} = b \cap q_{cda}^{\pm}, \quad Q_c^{\pm} = c \cap q_{dab}^{\pm}, \quad Q_d^{\pm} = d \cap q_{abc}^{\pm}.$$

Ist eines der Geradenpaare parallel, so existiert kein einbeschriebenes Quadrat.



Spezielle Vierecke

Abschließend sei auf zwei Spezialfälle näher eingegangen, in denen das Viereck ein rechtwinkliges Diagonaldreieck hat oder orthogonale Diagonalen besitzt. Dazu sei das Diagonaldreieck wieder Bezugsdreieck.



Für ein Viereck mit rechtwinkligem Diagonaldreieck gilt

$$b^2 = a^2 + c^2 \quad bzw. \quad S_B = 0.$$

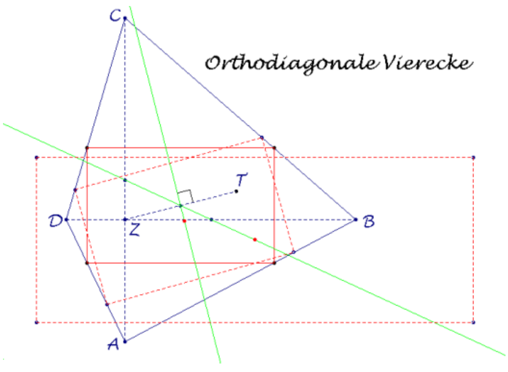
Dann lässt sich die Gleichung des Kegelschnitts der Rautenmitten faktorisieren:

$$y(a^2v^2w^2x + (a^2 + c^2)u^2w^2y + c^2u^2v^2z) = 0$$

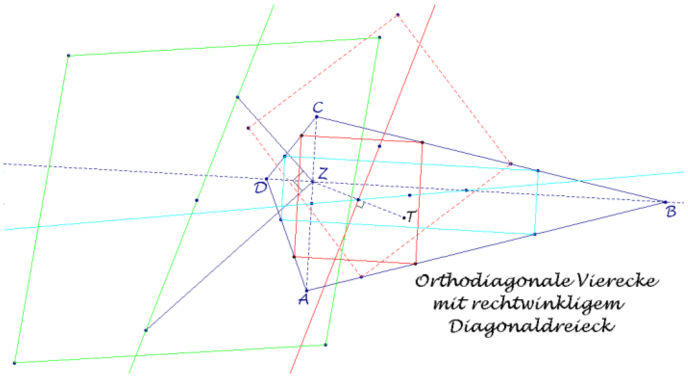
und der Kegelschnitt entartet in einem Geradenpaar: Eine Gerade ist die Basisgerade des Diagonaldreiecks: *Pg*-Mitten auf dieser Basisgeraden liefern Rauten, deren Diagonalen parallel zu den Schenkeln des rechten Winkels sind. Auf dieser Geraden liegen auch die Quadratmitten. Die andere Gerade ist die Mittelsenkrechte von Poncelet- und Bennett-Punkt. Auf dieser Geraden liegt die Mitte des Fußpunktparallelogramms des Bennett-Punktes (s.o.), das jetzt eine Raute ist. Alle Rauten mit Mitten auf dieser Geraden sind ähnlich.
Für orthodiagonale Vierecke lässt sich die Gleichung des Kegelschnitts der Rechteckmitten faktorisieren:

$$(v^2x + (u^2 - w^2)y - v^2z)$$
$$((a^2 - c^2)v^2x + (a^2 + c^2)(u^2 - w^2)y + (a^2 - c^2)v^2z) = 0,$$

d.h., dieser Kegelschnitt entartet in ein Geradenpaar. Hinter dem ersten Faktor verbirgt sich die Newton-Gerade (vgl. (2)); *Pg*-Mitten auf dieser Geraden liefern jetzt Rechtecke, deren Seiten diagonalenparallel verlaufen.



Der zweite Faktor liefert wieder die Mittelsenkrechte von Poncelet- und Bennett-Punkt; d.h. das Fußpunktparallelogramm des Bennett-Punktes ist jetzt ein Rechteck. Alle Rechtecke, deren Mitten auf dieser Geraden liegen, haben das gleiche Seitenverhältnis.



Wählt man zu einem rechtwinkligen Diagonaldreieck eine Ecke des Vierecks auf der Winkelhalbierenden des rechten Winkels, so erhält man ein orthodiagonales Viereck. Liegen jetzt die *Pg*-Mitten auf der Basisgeraden des Diagonaldreiecks, so erhält man Rauten, deren Diagonalen parallel zu den Schenkeln des Diagonaldreiecks verlaufen. Liegen die *Pg*-Mitten auf der Newton-Geraden, so erhält man Rechtecke, deren Seiten parallel zu den Diagonalen des Vierecks sind. Liegen die *Pg*-Mitten auf der Mittelsenkrechten von Poncelet- und Bennett-Punkt, die jetzt parallel zur Basis des Diagonaldreiecks verläuft, so erhält man einbeschriebene Quadrate.

Literatur

[Yiu] F. v. Lamoen, P. Yiu: The Kiepert Pencil of Kiepert Hyperbolas. – Forum Geometricorum Volume 1 (2001) 125-132.

[Gib] J.-P. Ehrmann and B. Gibert: Special isocubics in the Triangle Plane. – http.//pagesperso-orange.fr/bernard.gibert/...

[Gri] D. Grinberg: Poncelet points and antigonal conjugates. − http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=109112

[Cun] H.M. Cundy, C.F. Parry: Geometrical Properties of some Euler and Circular Cubics. Part 2. – Journal of Geometry 68, 58-75, 2000.

[Stä] R. Stärk, D. Baumgartner: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. – PM 1/44. Jg. 2002, S.19.

[Lam] F. v. Lamoen: Inscribed Squares. – Geometricorum, Volume 4 (2004), 207-214.

[Sch] E. Schmidt: Miquel Points and Inscribed Triangles. – http://eckartschmidt.de

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de.